Lie群のproper作用の同変Whitehead群(代数的K-理論と代数的整数論)

荒木, 捷朗

数理解析研究所講究録
609巻 1987年 76-94

Lie群の proper 作用の同変 Whitehead群

大阪市大理　荒木捷朗　(Shôrô Araki)

研究集会では「Whitehead群，同変Whitehead群，G-expansion圏」の表題で，代表者の要請により expository な話としてなされた講演であるが，やはり細かい点で正確さを期す必要もあり，時間的に不可能である．

そこで，講演中に含まれていた今迄より若干新しい部分についてのみ，表題を変えて報告することにした．

同変 Whitehead群についての従来の理論は，コンパクト Lie群の作用に関するもの（[I1]，[I2]，[A]）で，ただその展開の最終段階に nonコンパクト Lie群の proper作用の（ある制限を受けた）同変 Whitehead群があらわれるので，proper作用について統一的に展開する方がよくないかとの高井氏（都立大）等の御指摘もあり，その線に沿って [A]を再編成してみた．

1. proper作用の同変 Whitehead群.

G を Lie群とし，G が作用する空間（G-空間）は常に

局所コンパクト，Hausdorff，とする．（Palais [P] は completely regular, Hausdorff，で論じているが，G-CW 複体等のためには上の若干強い條件の方が便利である．又，これが特に強い制限にならないことは，例えば G がコンパクトのときの有限 G-CW 複体はコンパクト Hausdorff 空間で，上の條件をみたしていることを指摘しておけば充分であろう）．

Lie 群 G が（上の條件を充す）空間 X に左から作用するとする．Palais [P] はこの作用が proper になるための 5 つの同値條件をのべている．その一つをもって proper G-空間を定義する．

$X \supset U$ に対し，$((U,U)) = \{g \in G \mid gU \cap U \neq \phi\}$ とおく．$\overline{((U,U))}$ がコンパクトのとき，U を <u>thin set</u> という．

G-空間 X が <u>proper</u>（又は proper G-作用をもつ）とは，i) $X \ni {}^{\forall}x$，x は thin な近傍をもつ，ii) $G\backslash X$（orbit 空間）が Hausdorff，を充していること．

定義より，proper G-空間 X の各点 x での isotropy 群 G_x はすべてコンパクトになる．

勿論コンパクト Lie 群の作用はすべて proper である．

G のコンパクト Lie 部分群 H に対し，$G/H \times D^n$（D^n は $\mathbb{R}^n$ の単位 n-disk）は，勿論 proper G 空間で，これを (euclidean) <u>proper n-G-cell</u> という．$f: G/H \times S^{n-1} \to X$（$S^{n-1} = \partial D^n$）を

(連続な) G-写像とし,

$$Y = X \cup_f G/H \times D^n$$

を G空間 X に n次元 proper G-cell を attach した G-空間という.

<u>補題 1.1</u> X, Y が proper G-空間で, $X = G\cdot C$, C は X のコンパクト集合, となっているとき, G-写像 $f: X \to Y$ は (局所コンパクト空間の間の連続写像として) proper 写像である.

この証明は proper G-作用の基本的性質より容易にわかる. この補題を用いると, 次の命題が示される.

<u>命題 1.2</u> X は proper G-空間, $Y = X \cup_f G/H \times D^n$ を X に proper G-cell を attach した G-空間とすると, Y も proper G-空間になる.

特に有限個の proper n-G-cells を同時に proper G空間 X に attach した G空間 (X の <u>有限 proper n-G-cellular extension</u>) も proper G-空間である.

G-空間の列

$$X = V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^{n-1} \subset V^n \subset \cdots$$

で, X は proper G-空間, V^n は V^{n-1} の 有限 proper n-G-cellular extension となっているものを考える. 各 V^n は proper G-空間である. $V = \operatorname{colim}_n V^n$ は一般にはわからないが, $\exists m > 0$, $V = V^m$ のときには V は proper G-空間で, このとき (V, X) を

有限相対 proper G-CW 複体という．通常のごとく，各

$$V^n - V^{n-1} = \coprod_i e^n_i, \quad e^n_i = G/H_i \times \mathrm{Int}\, D^n_i$$

と有限個の proper (開) n-G-cells の disjoint union に分解される．共軛類 (H_i) を G-cell e^n_i の (isotropy) type という．このことより，有限相対 proper G-CW 複体 (V, X) においては，$V - X$ は有限個の proper G-cells の disjoint union に分解されている．

上にのべたことの一部をまとめると，

命題 1.3. (V, X) を有限相対 proper G-CW 複体とすると，V は proper G 空間である．

elementary G-expansion を通常のごとく定義する ([I 1], [A])．$(W, X) \subset (V, X)$ を有限相対 proper G-CW 複体の包含（即ち，$W-X$ の G-cells は $V-X$ の G-cells の一部よりなる）で，これが

$$(W, X) \nearrow (V, X), \quad \text{elementary G-expansion rel } X,$$

であるとは，

$$V - W = e^{n-1} \sqcup e^n$$

と二つの G-cells よりなり，G-写像

$$f : G/H \times D^n \to V$$

で，$\partial D^n = S^{n-1} = D^{n-1}_+ \cup D^{n-1}_-$，$D^{n-1}_+ \cap D^{n-1}_- = S^{n-2}$ とおいて

$$f \mid G/H \times \mathrm{Int}\, D^n : G/H \times \mathrm{Int}\, D^n \approx e^n, \text{ G-同相},$$

$$f \mid G/H \times \mathrm{Int}\, D^{n-1}_+ : G/H \times \mathrm{Int}\, D^{n-1}_+ \approx e^{n-1}, \text{ G-同相},$$

となるものが存在すること。このとき e^{n-1}, e^n は同じ type

(H) とよち，特に type (H) の elementary G-expansion ということがある。

有限相対 proper G-CW 複体の elementary G-expansions を包含写像とみて，その有限個の合成を <u>formal G-expansion</u> といい，$(W, X) \nearrow (V, X)$ 等と記す。

G の Lie 部分群よりなる集合 $\mathcal{F}$ で次の条件をみたすものを考える：i) $\mathcal{F} \ni {}^{\forall}H$ はコンパクト。ii) $\mathcal{F} \ni H$, $H \sim H'$ (共軛) $\Rightarrow H' \in \mathcal{F}$. このような $\mathcal{F}$ を G の <u>コンパクト部分群の族</u> という。$\mathcal{F}$ は G の compact 部分群のいくつかの共軛類の union としてあらわされる。

X を proper G 空間，$\mathcal{F}$ を G の compact 部分群の族とし，次の圏 $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ を考える。Obj $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ は有限相対 proper G-CW 複体 (V, X) で，i) $i: X \subset V$ が G-ホモトピー同値，ii) $V-X$ の各 G-cells の type $\in \mathcal{F}$，をみたすものよりなる。Hom $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ は上の objects 間の formal G-expansions よりなる。同じ構成で作られた有限相対 proper G-CW 複体は同じとみなせば，この圏は小圏になる。$\mathcal{F} = \{all\} = \{$all compact subgroups$\}$ のとき，$\mathcal{E}_G(X) = \mathcal{E}_G(X, \{all\})$ と書く。

$\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ の objects について，$(V, X) \nearrow (W, X)$ のとき，これを同値とみて，この関係で generate された同値関係 ～ を考える。

$$Wh_G(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Obj}\, \mathcal{E}_G(X, \mathcal{F}) / \sim$$

$$Wh_G(X) = \mathrm{Obj}\, \mathcal{E}_G(X)/\sim$$

とおく.

$\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ の object (V, X) が代表する $Wh_G(X,\mathcal{F})$ の元を $[V, X]$ と書く. $i: X \subset V$ は G-homotopy 同値で i は G-cofibration であるから X は V の (strong) G-deformation retract である. 二つの objects (V_1, X), (V_2, X) に対し

$$(V_1, X) + (V_2, X) = (V_1 \cup_X V_2, X)$$

とおく. V_1, V_2 の X への G-deformation retractions の和により, X は $V_1 \cup_X V_2$ の G-deformation retract. よって $(V_1, X) + (V_2, X)$ は $\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ の object になる. この objects の和は morphism を保つから $\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ は "category with sum" になる. この和は $Wh_G(X,\mathcal{F})$ の和を導き, $Wh_G(X,\mathcal{F})$ は abelian monoid ($[X, X]$ を 0 元とする) になる. 実は abel 群になるのであるが, それはあとで論ずる.

$f: X \to Y$ を proper G 空間の間の G 写像とする. $\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ の object (V, X) に対し, $(V \cup_f Y, Y)$ は $\mathcal{E}_G(Y,\mathcal{F})$ の object になる. 対応 "$(V, X) \mapsto (V \cup_f Y, Y)$" は morphism と和を保存し, 和を保つ functor

$$f_\# : \mathcal{E}_G(X,\mathcal{F}) \to \mathcal{E}_G(Y,\mathcal{F})$$

となり, 準同型

$$f_* : Wh_G(X,\mathcal{F}) \to Wh_G(Y,\mathcal{F})$$

を誘導する。 $f, g: X \to Y$ が G-ホモトープのとき，その G-ホモトピー $F: f \simeq_G g$ を用い，$\mathcal{E}_G(X, \mathfrak{F})$ の object (V, X) に対して $(V \times I \cup_F Y, Y)$ なる $\mathcal{E}_G(Y, \mathfrak{F})$ の object を考える。 $V - X$ の各 G-cell とその上の cylinder とが elementary G-expansion を構成するから，skeleton-wise, G-cell-wise に

$$(V \cup_f Y, Y) \nearrow (V \times I \cup_F Y, Y) \nwarrow (V \cup_g Y, Y)$$

が通常の論法で示され，特に

$$f_*[V, X] = g_*[V, X].$$

つまり，f_* は G-homotopy functor になる。

<u>定理 1.4.</u> $\mathcal{E}_G(X, \mathfrak{F})$ の objects の包含 $(X, V) \subset (X, W)$ (部分複体) が与えられたとする。(このとき G-retraction $r: V \to X$ が存在し，(W, V) は $\mathcal{E}_G(V, \mathfrak{F})$ の object になる)。このとき

$$[W, X] = r_*[W, V] + [V, X] \in Wh_G(X, \mathfrak{F}).$$

この定理の証明は [I1], Chap. II, Lemma 2.2, と全く同じであるから省略するが，この定理は同変 Whitehead 群の理論でかなりの重要性をもつ。

<u>定理 1.5.</u> $Wh_G(X, \mathfrak{F})$ はアーベル群になる。

証明の概略。 (V, X) を $\mathcal{E}_G(X, \mathfrak{F})$ の object とする。X は V の G-deformation retract だから，G-retraction $r: V \to X$ が存在する。このとき，M_r を r の mapping cylinder, $\bar{M}_r = M_r/\sim$,

$\sim$ は $pr_1: X\times I \to X$ で $X\times I$ と X とを同一視する同値関係, とおくと $(\bar{M}_r, X)$ は $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ の object で $(X, X) \nearrow (\bar{M}_r, X)$. よって

$$[\bar{M}_r, X] = 0 \in Wh_G(X, \mathcal{F}).$$

包含 $(V, X) \subset (\bar{M}_r, X)$ に対して上の定理 1.4 を適用すると,

$$0 = [\bar{M}_r, X] = r_*[\bar{M}_r, V] + [V, X].$$

即ち $r_*[\bar{M}_r, X]$ が $[V, X]$ の加法逆元で, $Wh_G(X, \mathcal{F})$ のすべての元は加法逆元をもつ。(3).

特に, p-Top_G を proper G 空間とその G 写像の圏とすると, 対応:「$X \mapsto Wh_G(X, \mathcal{F})$, "$f: X\to Y$" $\mapsto f_*$」により G-ホモトピー関手

$$Wh_G(\ ;\mathcal{F}) : p\text{-}Top_G \longrightarrow \mathcal{A}b$$

が得られたことになる。

(proper 作用の) 単純ホモトピー理論とは, $Wh_G(X)$ を上の関手としての naturality まで考慮しながら, 直和分解し, その直和因子をより単純なものに帰着させ, 更に直和分解し, …… の過程を通って, 最終的にはいくつかの discrete 群の古典的な Whitehead 群の直和との同型を得るもの と理解してよい.

2. 同変単純ホモトピー理論

前節の記号をつづけて使用する.

定理2.1.（Hauschild）Xについてnaturalな次の直和分解が成立つ.

$$Wh_G(X,\mathcal{F}) \cong \coprod_{(H)\subset\mathcal{F}} Wh_G(X,(H))$$

$$Wh_G(X) \cong \coprod_{(H)} Wh_G(X,(H)).$$

但し，第一の分解での直和は$\mathcal{F}$に含まれるすべての共軛類にわたり，第二の分解では（直和は）Gのすべてのコンパクト部分群の共軛類をわたる.

証明の方針. 第二の直和分解は第一のそれの$\mathcal{F}=\{all\}$となる特別の場合であるから，第一の直和分解を示せばよい. 先ず特別の場合として，$\mathcal{F}$が有限（$\mathcal{F}$に含まれる共軛類の数が有限）の場合に示す. Gのコンパクト部分群の共軛類については「$(H)\leq(K) \Leftrightarrow {}^{\exists}g\in G,\ gHg^{-1}\subset K$」により順序が入る. $\mathcal{F}$は有限と仮定したから，この順序で極大な元$(H)\in\mathcal{F}$が定まる. $\mathcal{F}'=\mathcal{F}-(H)$とおく. (H)の代表元Hを一つ選び，$\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$のobject (V,X)に対し，$(G\cdot V^H\cup X,\ X)$を考える. VのXへのG-deformation retractionを$G\cdot V^H\cup X$に制限すると，(H)の極大性より，これは$G\cdot V^H\cup X$のXへのG-deformation retractionになる. morphismについても同じ考察をすると，和を保つ関手

$$a:\ \mathcal{E}_G(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}_G(X,(H))$$

$$(\ (V,X) \longmapsto (G\cdot V^H\cup X,\ X)\ )$$

が得られ，Xについてnaturalな準同型

$$a_* : Wh_G(X, \mathcal{F}) \longrightarrow Wh_G(X, (H))$$

を誘導する．$r : G\cdot V^H \cup X \to X$ を G-retraction とする．maphis についても考察して，準同型

$$b_* : Wh_G(X, \mathcal{F}) \longrightarrow Wh_G(X, \mathcal{F}')$$

$$([V, X] \longmapsto r_*[V, G\cdot V^H \cup X])$$

を得る．r は $i : X \subset G\cdot V^H \cup X$ の G-homotopy inverse であるから，上の対応は r のとり方に寄らず well-defined．準同型

$$c : Wh_G(X, (H)) \oplus Wh_G(X, \mathcal{F}') \longrightarrow Wh_G(X, \mathcal{F})$$

を $c([V_1, X], [V_2, X]) = [V_1 \cup_X V_2, X]$ により与える．定義より

$$(a_* \oplus b_*) \circ c = 1$$

は明らか．

$$c \circ (a_* + b_*) = 1$$

は定理 1.4 より得られる．よって直和分解

$$Wh_G(X, \mathcal{F}) \cong Wh_G(X, (H)) \oplus Wh_G(X, \mathcal{F}')$$

が得られた．$\mathcal{F}$ は有限としたから，あとは $\mathcal{F}'$ について同じ論法をくりかえし，$\mathcal{F}$ が有限のときの直和分解

$$Wh_G(X, \mathcal{F}) \cong \coprod_{(H_i) \subset \mathcal{F}} Wh_G(X, (H_i))$$

が得られる．上の証明の議論より，この右から左への対応は

$$\coprod_i (V_i, X) \longmapsto (\cup_X V_i, X)$$

で与えられていることがわかる．

一般の場合は $\mathcal{F}$ に含まれる有限族 $\mathcal{F}_\alpha$ をすべて考えると，包含について $\mathcal{F} = \operatorname{colim}_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ となっている．よって直和

分解と colim との可換性より一般の場合の直和分解が得られる。

注意 一般の場合でも右辺から左辺への写像は

$$\coprod_{\alpha}[V_\alpha, X] \longmapsto [\textstyle\bigcup_X V_\alpha, X]$$

になっている。ただし，$\{[V_\alpha, X]\}$ は有限個を除き 0 であるから，そこでは代表元を (X, X) でおきかえると $(\bigcup_X V_\alpha, X)$ が well-defined で，そのようになっている。X についての自然性はこの対応から明らかである。

上の証明のやり方は Hauschild [H] のそれとかなり異る。Hauschild の証明は，あまり簡単に書きすぎていて理解しにくい。

H を G のコンパクト部分群とし，NH を H の G における normalizer とすると，NH は G の閉部分群になり，X^H は proper NH-空間になる。H は X^H 上に自明に作用するから，$WH=NH/H$ とおいて，X^H は proper WH-空間になる。

定理 2.2 (Hauschild). X についての自然な同型

$$Wh_G(X, (H)) \cong Wh_{WH}(X^H, (1))$$

が成立つ。

対応は，左から右へは "$[V, X] \mapsto [V^H, X^H]$"，右から左へは "$[W, X^H] \mapsto [G\times_{NH} W \cup_f X, X]$"，$f: G\times_{NH} X^H \to G\cdot X^H \subset X$，で与えられる。この X についての自然性はすぐ

わかる。

ここで注意すべきことは，X が proper 有限 G-CW 複体として $\mathcal{E}_G(X,(H))$ の object (V,X) が proper 有限 G-CW 複体と部分複体の対（Illman流のやり方）としても，$V-X$ の G-cells と V^H-X^H の G-cells は 1:1 に対応するから V^H-X^H の有限性は保障されるが，X^H は有限 WH-CW 複体には必ずしもならない。相対 G-CW 複体で定義することの利点が proper 作用の同変単純ホモトピー理論で初めてあらわれたといえるかも知れない。

次に $Wh_{WH}(X^H,(1))$ を更に分解する。

定義　proper G-空間 X が局所 G-0-連結とは，$G>^{\forall}H$，コンパクト部分群，に対し X^H が局所弧状連結であること。更に局所 G-1-連結とは，i) X は局所 G-0-連結，ii) $G>^{\forall}H$，コンパクト部分群，に対して X^H の各弧状連結成分が半局所 1-連結（普遍被覆空間をもつ条件）であること。

X は局所 G-0-連結であるとする。X^H を弧状連結成分に分解し，その WH-orbits をまとめると，

$$X^H=\coprod_\alpha WH\cdot X^H_\alpha \quad (X^H_\alpha \text{ はある弧状連結成分})$$

と proper WH-部分空間の位相和に分解される。各 $WH\cdot X^H_\alpha$ を X^H の WH-成分という。

定理 2.3. X が局所 G-0-連結のとき，直和分解

$$Wh_{WH}(X^H,(1))\cong\coprod_\alpha Wh_{WH}(WH\cdot X^H_\alpha,(1))$$

が成立つ.

この分解は $[V, X^H] \in Wh_{WH}(X^H, (1))$ に対し, $r: V \to X^H$ を WH-retraction として, $V_\alpha = r^{-1}(WH\cdot X^H_\alpha)$ とおき, 対応

$$[V, X^H] \longmapsto \coprod_\alpha [V_\alpha, WH\cdot X^H_\alpha]$$

により得られる.

上の定理の X についての naturality については, $f: X \to Y$ が局所 G-0-連結 proper G-空間の G-写像で, $f^H: X^H \to Y^H$ が弧状連結成分の bijection (従って WH-成分の bijection) を与えるものについて, 次の diagram が可換という意味で naturality が成立つ

$$\begin{array}{ccc} Wh_{WH}(X^H, (1)) & \cong & \coprod_\alpha Wh_{WH}(WH\cdot X^H_\alpha, (1)) \\ \downarrow f^H_* & & \downarrow \coprod \bar{f}^H_{\alpha *} \\ Wh_{WH}(Y^H, (1)) & \cong & \coprod_\alpha Wh_{WH}(WH\cdot Y^H_\alpha, (1)). \end{array}$$

但し. $f^H(X^H_\alpha) \subset Y^H_\alpha$ ととり, $\bar{f}^H_\alpha: WH\cdot X^H_\alpha \to WH\cdot Y^H_\alpha$ (f^H の制限で得られる WH-写像) とする.

次に $Wh_{WH}(WH\cdot X^H_\alpha, (1))$ を reduce する. $WH\cdot X^H_\alpha$ の一つの連結成分 X^H_α を選び

$$W_\alpha H = \{w \in WH \mid w\cdot X^H_\alpha \subset X^H_\alpha\}$$

とおく. 明らかに

$$W_\alpha H \supset (WH)_0, \quad WH \text{ の } 1\text{-成分}$$

よって $WH/W_\alpha H$ は discrete, 特に $W_\alpha H$ は WH の閉部分群. よって

WH·X^H_α, X^H_α は proper $W_\alpha H$-空間になる。

定理 2.4. 次の同型が成立つ

$$Wh_{WH}(WH\cdot X^H_\alpha,(1)) \cong Wh_{W_\alpha H}(X^H_\alpha,(1)).$$

この同型は、G-写像 $f: X \to Y$ が定理 2.3 の下の naturality についての條件をみたすものに対して natural である。

上の定理の対応は "[V, WH·X^H_α] $\longmapsto$ [V_α, X^H_α]", 但し V_α は V の X^H_α を含む連結成分、によって得られる。

次に、X が G-1-連結とする。$\tilde{X}^H_\alpha$ を X^H_α の普遍被覆空間とする。$\tilde{X}^H_\alpha$ は局所コンパクト、Hausdorff 空間である。

Illman [I2] に従い、$\tilde{X}^H_\alpha$ には次の Lie 群 $\Gamma_{H,\alpha}$ が proper に作用する。2段階に分けて構成する。

i) $W_\alpha H$ が X^H_α に effective に作用しているとき、

$$\mathrm{Homeo}(\tilde{X}^H_\alpha) \supset \Gamma_{H,\alpha} = \{f: \tilde{X}^H_\alpha \to \tilde{X}^H_\alpha,\ f \text{ は } W_\alpha H \text{ のある作用を cover している}\}$$

Prps. $\exists\, w \in W_\alpha H$,
$$\begin{tikzcd} \tilde{X}^H_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[d, "pr"'] & \tilde{X}^H_\alpha \arrow[d, "pr"] \\ X^H_\alpha \arrow[r, "w"] & X^H_\alpha \end{tikzcd}$$
が可換。

$\pi_{H,\alpha} = \pi_1(X^H_\alpha)$ を $\tilde{X}^H_\alpha$ 上に被覆変換群として作用させると、短完全列

$$\{1\} \longrightarrow \pi_{H,\alpha} \longrightarrow \Gamma_{H,\alpha} \longrightarrow W_\alpha H \longrightarrow \{1\}$$

が得られる。特に、Lie 群 $W_\alpha H$ の discrete 部分群 $\pi_{H,\alpha}$ による

拡大として，$\Gamma_{H,\alpha}$ は Lie 群である．そして，$\Gamma_{H,\alpha}$ の $\tilde{X}^H_\alpha$ 上の作用が proper であることもすぐわかる．

ii) $W_\alpha H$ の X^H_α 上の作用が effective でないとき，

X^H_α に free elementary $W_\alpha H$-expansion を一つ attach すると，その上での $W_\alpha H$ の作用は effective になる．その上で $\Gamma_{H,\alpha}$ を構成し，これを $\tilde{X}^H_\alpha$ 上に制限する．この action は free elementary $W_\alpha H$-expansion の attach の仕方によらないことも示される．

このようにして一般に $\tilde{X}^H_\alpha$ を proper $\Gamma_{H,\alpha}$-空間に出来る．

<u>定理 2.5.</u> X が局所 G-1-連結のとき，同型

$$Wh_{W_\alpha H}(X^H,(1)) \cong Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha,(1))$$

が成立つ．この同型は次の意味で natural である．局所 G-1-連結な proper G-空間の G-写像 $f: X \to Y$ が $G > {}^\forall H$, compact, に対して $f^H: X^H \to Y^H$ が連結成分の bijection を与え，更に各成分について π_1 の同型を与えているとき，

$$\begin{array}{ccc} Wh_{W_\alpha H}(X^H_\alpha,(1)) & \cong & Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha,(1)) \\ \downarrow f^H_{\alpha *} & & \downarrow f^H_{\alpha *} \\ Wh_{W_\alpha H}(Y^H_{\alpha *},(1)) & \cong & Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{Y}^H_\alpha,(1)) \end{array}$$

が可換．

最後に，

<u>定理 2.6.</u> X が局所 G-1-連結のとき，同型

$$Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha,(1)) \cong Wh(\pi_0(\Gamma_{H,\alpha}))$$

が成り立つ。この同型の右辺は discrete 群 $\pi_0(\Gamma_{H,\alpha})$ の代数的な Whitehead 群。更に定理 2.5 の naturality の条件の下で

$$\begin{tikzcd}
Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha,(1)) \arrow[dd, "\tilde{f}^H_{\alpha *}"] \arrow[dr, "\cong"] & \\
& Wh(\pi_0(\Gamma_{H,\alpha})) \\
Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{Y}^H_\alpha,(1)) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換になる。

上の定理の同型は [I 2] の証明と同様に行えばよい。

定理 2.6，定理 2.5，定理 2.4，定理 2.3，定理 2.2 の naturality を逆にたどると次の定理を得る。

<u>定理 2.7.</u> $f: X \to Y$ を proper G空間の間の G-写像とし，X，Y は局所 G-1-連結で，$f^H: X^H \to Y^H$ が連結成分の bijection と，各連結成分での π_1 の同型を与えるとすると，

$$f_*: Wh_G(X,(H)) \cong Wh_G(Y,(H)), \text{ 同型.}$$

この定理は同変 s-コボルディズム定理の証明に利用される。

3. 同変 s-コボルディズム定理

ここでは G は<u>コンパクト</u> Lie 群とする。(W, X, Y) が<u>G-h-コボルディズム</u>であるというのは，W はコンパクト C^∞-G-多様体で $\partial W = X \sqcup Y$ と2つの成分にわかれ，更に包含 $i_X: X \subset W$，$i_Y: Y \subset W$ が G-ホモトピー同値になっているとき。

Wにあらゆれるisotropy群H, Kに対し, 夫々H-, K-不動点多様体を

$$W^H = \coprod_\lambda W^H_\lambda, \qquad W^K = \coprod_\mu W^H_\mu$$

と連結成分に分解する。次の2つの條件を考える。

(*1) すべての組(K, H), (μ, λ)について

$$W^K_\mu \supsetneq W^H_\lambda \Rightarrow \dim W^K_\mu - \dim W^H_\lambda \geqq \dim G + 3.$$

(*2) Hが極大isotropy群のとき, すべてのλについて

$$\dim W^H_\lambda \geqq \dim G + 6.$$

同変s-コボルディズム定理が次の形で成立つ。

定理3.1. (荒木-川久保) G-h-コボルディズム(W, X, Y)が次の條件をみたすとする。

(i) $\tau_G(i_X) = [W, X] = 0$ ($Wh_G(X)$において)

(ii) (W, X, Y)は條件(*1), (*2)をみたす。

$\Rightarrow$ $(W, X) \cong (X \times I, X \times \{0\})$: G-微分同相 rel X.

この定理の証明には松本-塩田[MS]のコンパクトG-微分多様体に対する同変Whitehead torsionのwell-definednessを利用し, 上の定理2.7及び川久保[K]の論法を用いる。松本-塩田の論法は, 実解析的G-多様体に帰着するので, かってなG-CW-分割ではいけないから, それを用いる証明にはかなりの注意を要する。

最近, 青木-加藤は上の條件(*1), (*2)を次の形に変え

ている

(*3) すべての組 (K, H), (μ, λ) について

$$W^K_\mu \neq W^H_\lambda \Rightarrow \dim W^K_\mu - \dim (W^K_\mu \cap G\cdot W^H_\lambda) \geq 3,$$

(*4) H が極大 isotropy 群のとき，すべての λ に対して

$$\dim (W_\lambda H \setminus W^H_\lambda) \geq 6 .$$

そして，上の定理3.1で条件(ii)を次の条件

(ii') (W, X, Y) は条件(*3), (*4) をみたす

でおきかえ，この形でも定理3.1と同じ結論が得られるとしている．

証明は，荒木－川久保[AK]と同じとしているが，この形の方がより一般性をもつと考えられる．更にG-h-コボルディズムの実現性定理，一意性定理も得られているようである．

一般のLie群Gのproper作用についてのG-h-コボルディズム(W, X, Y)を考える．このときはWがコンパクトと仮定出来ないが，"$G\backslash W$がコンパクト"なる仮定を入れると，同変s-コボルディズム定理が成り立つだろうと云われているが，証明があるのか，ないのか，小生にはまだわからない．

（以上）

文献

[A] S. Araki, Equivariant Whitehead groups and G-expansion categories, Advanced Studies in Pure Math, vol. 9 (to appear).

[AK] S. Araki – K. Kawakubo, Equivariant s-cobordism theorems (to appear).

[H] H. Hauschild, Äquivariante Whiteheadtorsion, Manuscripta math. 26 (1978), 63–82.

[I1] S. Illman, Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci., Fenn., Ser. AI, 558 (1974), 1–45.

[I2] S. Illman, Actions of compact Lie groups and the equivariant Whitehead group, Osaka J. Math. (to appear).

[K] K. Kawakubo, Compact Lie group actions and fibre homotopy type, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 295–321.

[MS] T. Matumoto and M. Shiota, Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications, Advanced Studies in Pure Math., vol. 9 (to appear).

[P] R. S. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, Ann. of Math., 73 (1961), 295–323.